6. INTEGRALES DE LINEA

6.3. Integrales de línea en el plano

Conjuntos simplemente conexos

Un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ se llama **simplemente conexo** si cualquier curva cerrada contenida en Ω tiene todo su interior contenido en Ω. En caso contrario, el dominio se llama **múltiplemente conexo**. Intuitivamente, un dominio es simplemente conexo cuando no tiene *agujeros*, ni siquiera puntuales.

Condición necesaria y suficiente para la existencia de función potencial en $\mathbb{R}^2$

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio simplemente conexo y $F = (P, Q) \,:\, \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial diferenciable con continuidad. Entonces:

$$F \text{ es campo conservativo en } \Omega \iff \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ en } \Omega$$

Observación

Cuando las derivadas cruzadas coinciden en todo el plano excepto en un punto, el campo vectorial es conservativo en cualquier dominio simplemente conexo que no contenga a dicho punto y, como consecuencia:

- La integral de línea es cero sobre cualquier curva cerrada que no pase por el punto ni lo contenga en su interior.
- La integral de línea es independiente del camino en cualquier dominio simplemente conexo que no contenga al punto.

Ejemplo

Calcula la integral del campo vectorial $F(x, y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ sobre la curva γ parametrizada por $\alpha(t) = (t, \sqrt{t})$, $1 \le t \le 4$.

Conjuntos convexos

Un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se llama **convexo** si cualquier par de puntos del dominio el segmento que los une está contenido en él.

Condición necesaria y suficiente para la existencia de función potencial en $\mathbb{R}^n$

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio convexo y $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \,:\, \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial diferenciable con continuidad. Entonces:

$$F \text{ es campo conservativo en } \Omega \iff \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \text{ en } \Omega \,,\ \ 1 \le i, j \le n$$

Integrales de línea sobre curvas cerradas planas

Sea $F = (P, Q)$ un campo vectorial plano. Se llama **punto singular** a cualquier punto (x_0, y_0) donde no existen o no son continuas P y/o Q o sus derivadas parciales y se cumple además que F es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\left\{(x, y) \,:\, 0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\right\}$, $r > 0$.

1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio con $A \in \Omega$, sea $F = (P, Q)$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ en $D = \Omega \setminus \{A\}$ con $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ en D, y sea $\gamma \subset D$ una curva cerrada (que no pasa por el punto A). Entonces:

- Si γ no contiene al punto A en su interior, F es un campo conservativo en algún dominio simplemente conexo que contiene a la curva γ y, por tanto:

$$\oint_\gamma F\,ds = 0$$

- Si γ contiene al punto A en su interior, y $C \subset D$ es otra curva cerrada, con la misma orientación que γ, que también contiene al punto A en su interior, se cumple que:

$$\oint_\gamma F\,ds = \oint_C F\,ds$$

2. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio con $A_1, A_2, \ldots, A_N \in \Omega$, sea $F = (P, Q)$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ en $D = \Omega \setminus \{A_1, A_2, \ldots, A_N\}$ con $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ en D, y sea $\gamma \subset D$ una curva cerrada que contiene a los puntos $\{A_1, A_2, \ldots, A_N\}$ en su interior. Entonces:

$$\oint_\gamma F\,ds = \sum_{i=1}^{N} \oint_{C_i} F\,ds$$

donde $C_i \subset \Omega$, $1 \leq i \leq N$, es cualquier curva cerrada, con la misma orientación de γ, que contiene al punto A_i en su interior y que no contiene ni corta a ningún otro punto A_j, $j \neq i$.

Orientación en el borde de curvas cerradas planas

En las curvas cerradas planas, la **orientación positiva** es aquella en la que al recorrer la curva sobre el papel se deja el interior a la izquierda, siendo la **orientación negativa** la contraria. En el caso particular de circunferencias, la orientación positiva es la contraria a la de las agujas del reloj.

Ejemplo

Sea $F = (P, Q)$ con $P(x, y) = x + y(x^2 + y^2)^{-1}$ y $Q(x, y) = y - x(x^2 + y^2)^{-1}$. Calcula la integral de línea de F sobre γ_i, donde:
(a) γ_1 es la circunferencia $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 4$, orientada positivamente.
(b) γ_2 es el astroide de ecuación $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$, orientado positivamente.
(c) γ_3 es el segmento que une el punto $(1, 1)$ con el punto $(2, 1)$.

Ejercicios

1. Calcula

$$I = \int_\gamma \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right) dx + \left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right) dy$$

donde γ es el arco de la circunferencia $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - \pi)^2 = \frac{1}{4}$ que une los puntos $(1, \pi)$ y $(2, \pi)$.

2. Calcula

$$I_i = \int_{\gamma_i} \frac{x\,dx + y\,dy}{e^{x^2+y^2} - 1} \quad , \qquad i = 1, 2$$

donde:
(a) γ_1 es el triángulo de vértices $A(7, 0)$, $B(6, 6)$ y $C(4, 5)$; y
(b) γ_2 es el cuadrilátero de vértices $D(1, 0)$, $E(0, 5)$, $F(-6, -1)$ y $G(-1, -5)$.

Soluciones y/o sugerencias a los ejercicios:

1. $I = 1 + \pi$.
2. **(a)** $I_1 = 0$; **(b)** $I_2 = 0$.